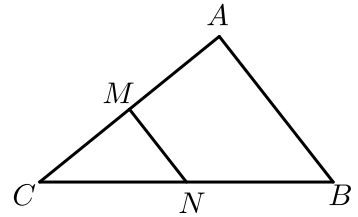


第2讲 相似三角形的基本模型练习

一、A字模型

练习

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， M 、 N 分别为 AC ， BC 的中点．若 $S_{\triangle CMN} = 1$ ，则 $S_{\text{四边形}ABNM} = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 3

【解析】 $\because M$ 、 N 分别为 AC ， BC 的中点，

$\therefore MN$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore MN \parallel AB$ ，

$\therefore \triangle MNC \sim \triangle ABC$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}，$$

$\because S_{\triangle CMN} = 1$ ，

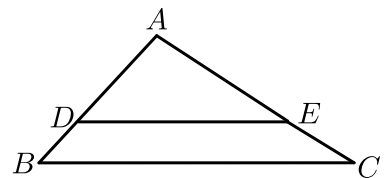
$\therefore S_{\triangle ABC} = 4$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}ABNM} = 3$ ．

故答案为：3．

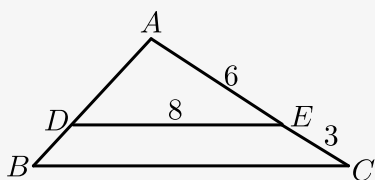
【标注】【知识点】相似A字型

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E 分别是 AB ， AC 上的点， $DE \parallel BC$ ．若 $AE = 6$ ， $EC = 3$ ， $DE = 8$ ，则 $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 12

【解析】



$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\angle AED = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore DE = 8, AE = 6, CE = 3,$$

$$\therefore AC = 9.$$

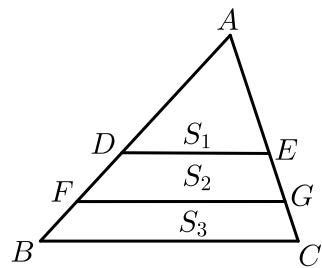
$$\therefore \frac{8}{BC} = \frac{6}{9},$$

$$\therefore BC = 12.$$

故答案为：12.

【标注】【知识点】相似A字型

3. 如图， $\triangle ABC$ 被 DE 、 FG 分成面积相等的三部分，即 $S_1 = S_2 = S_3$ ，且 $DE \parallel FG \parallel BC$ ，则 $DE : FG : BC$ 等于（ ）.



A. $1 : 2 : 3$

B. $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

C. $1 : \sqrt{3} : \sqrt{6}$

D. $1 : 2 : \sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】 $\because S_1 = S_2,$

$$\therefore S_{\triangle ADE} : S_{\triangle AFG} = 1 : 2,$$

$$\therefore DE^2 : FG^2 = 1 : 2,$$

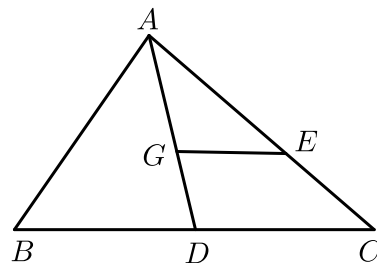
$$\therefore DE : FG = 1 : \sqrt{2};$$

$$\text{同理, } DE : BC = 1 : \sqrt{3}$$

$$\therefore DE : FG : BC = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} .$$

【标注】【知识点】相似A字型

4. 如图，点G是 $\triangle ABC$ 的重心， $GE \parallel BC$ ，如果 $BC = 12$ ，那么线段GE的长为_____。



【答案】4

【解析】 $\because$ 点G是 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore AD$ 为中线， $AG = 2GD$ ，

$\therefore AD = CD = \frac{1}{2}BC = 6$ ，

$\because GE \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AGE \sim \triangle ADC$ ，

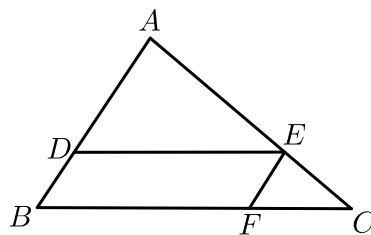
$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{GE}{DC}$ ，即 $\frac{2}{6} = \frac{GE}{6}$ ，

$\therefore GE = 4$ 。

故答案为：4。

【标注】【知识点】相似A字型

5. 如图，已知在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ， $AE = 2CE$ ， $AB = 6$ ， $BC = 9$ 。求：



- (1) 求BF和BD的长度。
(2) 四边形BDEF的周长。

【答案】(1) 6；2。

(2) 16。

【解析】(1) $\because DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ，

$$\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{EF}{AB}, \text{ 解得 } EF = 2, \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}, \text{ 解得 } BF = 6,$$

易证四边形 $BDEF$ 为平行四边形.

$$BF = 6, BD = EF = 2.$$

故答案为: 6; 2.

(2) 由(1)知, 四边形 $BDEF$ 是平行四边形,

$$\therefore BD = EF = 2, DE = BF = 6,$$

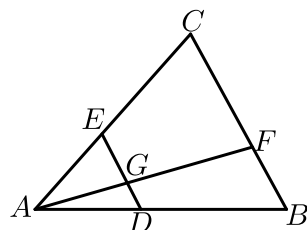
$$\therefore \text{四边形 } BDEF \text{ 的周长 } 2 \times (2 + 6) = 16.$$

故答案为: 16.

【标注】【知识点】相似A字型

练习

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的点, $DE \parallel BC$, 点 F 为 BC 边上一点, 连接 AF 交 DE 于点 G . 则下列结论中错误的是 ().



A. $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
C. $\frac{DB}{AE} = \frac{EC}{BF}$

B. $\frac{EG}{CF} = \frac{DG}{BF}$
D. $\frac{CF}{AD} = \frac{BF}{AC}$

【答案】 D

【解析】 A 选项: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \text{ 正确, 故本选项不符合题意;}$$

B 选项: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ACF, \triangle ADG \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{EG}{CF} = \frac{AG}{AF}, \frac{DG}{BF} = \frac{AG}{AF},$$

$$\therefore \frac{EG}{CF} = \frac{DG}{BF}, \text{ 正确, 故本选项不符合题意;}$$

C 选项: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle AEG \sim \triangle ACF, \triangle ADG \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AG}{AF}, \frac{DG}{BF} = \frac{AG}{AF},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{DG}{BF}, \text{ 正确, 故本选项不符合题意;}$$

D 选项： $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

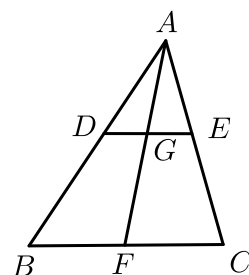
$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$, 错误, 故本选项符合题意;

故选 D.

【标注】【知识点】相似A字型

7. 如图, F 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, $DE \parallel BC$ 交 AF 于点 G , 若 $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{GE}{CF} = ()$.



A. $\frac{3}{7}$

B. $\frac{4}{7}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】A

【解析】 $\because \frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7},$$

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{7},$$

$\because DE \parallel BC$,

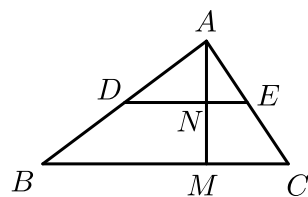
$\therefore \triangle AGE \sim \triangle AFC$,

$$\therefore \frac{GE}{CF} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{7}.$$

故选 A.

【标注】【知识点】相似A字型

8. 如图, 已知 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, $\triangle ABC$ 的高 AM 交 DE 于点 N , 则 $\frac{AN}{AM}$ 的值为 _____.

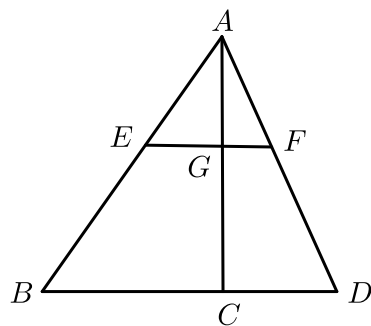


【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，
 $\therefore DE = \frac{1}{2}BC$ ， $DE \parallel BC$.
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$.
 $\therefore \frac{AN}{AM} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$.

【标注】 【知识点】 相似A字型

9. 如图， $\triangle ABD$ 中， $EF \parallel BD$ 交 AB 于点 E ，交 AD 于点 F ， AC 交 EF 于点 G ，交 BD 于点 C ，
 $S_{\triangle AEG} = \frac{1}{8}S_{\text{四边形}EBCG}$ ，则 $\frac{AF}{AD}$ 的值为（ ）.



A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】 D

【解析】 $\because S_{\triangle AEG} = \frac{1}{8}S_{\text{四边形}EBCG}$ ，
 $\therefore S_{\triangle AEG} = \frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$ ，
 又 $\because EF \parallel BD$ ，
 $\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AC}$ （平行线截线段成比例）， $\angle EAG = \angle BAC$ ，
 $\therefore \triangle AEG \sim \triangle ABC$ ，
 $\therefore \frac{S_{\triangle AEG}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9}$ （相似三角形面积的比等于相似比的平方），
 $\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$ ，

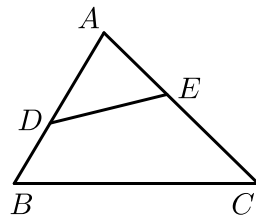
$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}.$$

故选：D．

【标注】【知识点】相似A字型

练习

10. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ADE = \angle C$ ，则下列等式成立的是（ ）．



A. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$
 C. $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}$

B. $\frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD}$
 D. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

【答案】C

【解析】 $\because \angle ADE = \angle C$ ，

$$\angle A = \angle A,$$

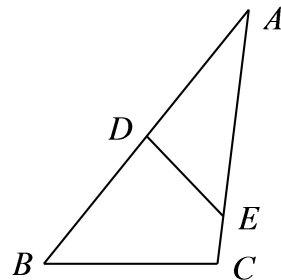
$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC},$$

故选C．

【标注】【知识点】相似反A字型

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 的中点， E 为 AC 上一点，连接 DE ，若 $AB = 12$ ， $AE = 8$ ， $\angle ABC = \angle AED$ ，则 $AC =$ _____．



【答案】9

【解析】 $\because \angle A = \angle A, \angle ABC = \angle AED,$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED,$$

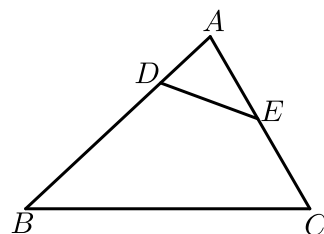
$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD},$$

$$\therefore \frac{12}{8} = \frac{AC}{6},$$

$$\therefore AC = 9.$$

【标注】【知识点】相似反A字型

12. 如图, D, E 分别是 $\triangle ABC$ 边 AB, AC 上的点, $\angle ADE = \angle ACB$, 若 $AD = 2, AB = 6, AC = 4$, 则 $AE =$ _____.



【答案】3

【解析】 $\because \angle ADE = \angle ACB, \angle A = \angle A,$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB},$$

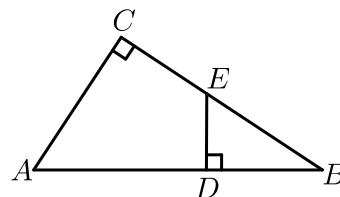
$$\text{即 } \frac{2}{4} = \frac{AE}{6},$$

$$\text{解得, } AE = 3,$$

故答案为: 3.

【标注】【知识点】相似反A字型

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, E 是 BC 上一点, $ED \perp AB$, 垂足为 D . 求证:
 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because ED \perp AB$,

$$\therefore \angle EDB = 90^\circ.$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

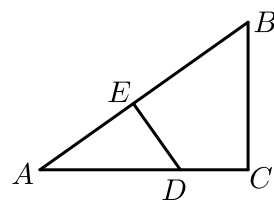
$$\therefore \angle EDB = \angle C.$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EBD.$$

【标注】【知识点】相似反A字型

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点 D 在 AC 上, $DE \perp AB$ 于点 E , 若 $AC = 8$, $BC = 6$, $DE = 3$, 求 AD 的长.



【答案】 $AD = 5$.

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, $BC = 6$,

$$\therefore AB = 10.$$

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEA = 90^\circ.$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE.$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}.$$

$$\because DE = 3,$$

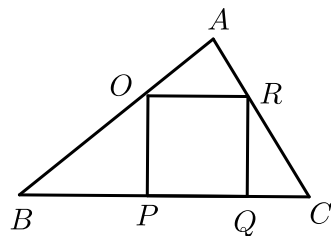
$$\therefore \frac{10}{AD} = \frac{6}{3}.$$

$$\therefore AD = 5.$$

【标注】【知识点】相似反A字型

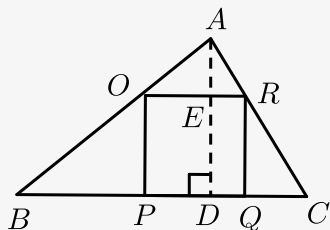
练习

15. 如图, 正方形 $OPQR$ 内接于 $\triangle ABC$, 已知 $S_{\triangle AOR} = 1$, $S_{\triangle BOP} = 3$ 和 $S_{\triangle CRQ} = 1$, 求正方形 $OPQR$ 的边长 OP .



【答案】2.

【解析】法一：过A作 $AD \perp BC$ 于D，交OR于E.



设正方形边长为 x ,

$$\therefore S_{\triangle BOP} = \frac{1}{2} BP \cdot OP = 3, \therefore BP = \frac{6}{x}.$$

$$\therefore S_{\triangle CRQ} = \frac{1}{2} CQ \cdot OR = 1, \therefore CQ = \frac{2}{x}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOR} = \frac{1}{2} AE \cdot OR = 1, \therefore AE = \frac{2}{x}.$$

$$\therefore S_{\triangle AOR} \sim S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{OR}{BC}, \text{ 即 } \frac{\frac{2}{x}}{\frac{2}{x} + x} = \frac{x}{\frac{6}{x} + x + \frac{2}{x}},$$

化简得 $x^4 = 16$, 解得 $x = 2$,

$$\therefore OP = 2.$$

法二：将 $\triangle ROC$ 向左平移至 $\triangle OPC'$,

则 $\angle AOR = \angle OBC'$, $\angle ARO = \angle ACB = \angle OC'B$,

$$\therefore \triangle AOR \sim \triangle ABC \sim \triangle OBC'.$$

$$\therefore S_{\triangle OBC'} = S_{\triangle BOP} + S_{\triangle CRQ} = 4,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AOR}}{S_{\triangle OBC'}} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{AO}{OB} = \frac{1}{2}, \frac{AO}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 9S_{\triangle AOR} = 9,$$

$$\therefore S_{OPQR} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOR} - S_{\triangle CRQ} = 9 - 1 - 3 - 1 = 4,$$

$$\therefore OP = 2.$$

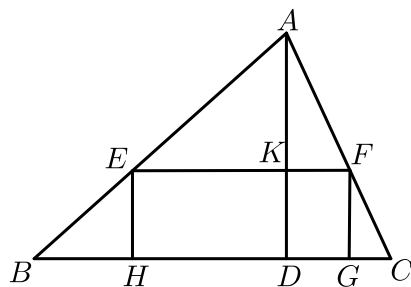
【标注】【知识点】相似A字型；相似三角形的性质与判定综合

16. 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，边 BC 长为12，高 AD 长为8.

(1) 如图, 矩形 $EFGH$ 的边 GH 在 BC 边上, 其余两个顶点 E 、 F 分别在 AB 、 AC 边上, EF 交 AD 于点 K .

① 求 $\frac{EF}{AK}$ 的值.

② 设 $EH = x$, 矩形 $EFGH$ 的面积为 S , 求 S 与 x 的函数关系式, 并求 S 的最大值.



(2) 若 $AB = AC$, 正方形 $PQMN$ 的两个顶点在 $\triangle ABC$ 一边上, 另两个顶点分别在 $\triangle ABC$ 的另两边上, 直接写出正方形 $PQMN$ 的边长.

【答案】(1) ① $\frac{EF}{AK} = \frac{3}{2}$.

$$\textcircled{2} S = -\frac{3}{2}(x-4)^2 + 24, S_{\max} = 24.$$

(2) 正方形 $PQMN$ 的边长为 $\frac{24}{5}$ 或 $\frac{240}{49}$.

【解析】(1) ① 由矩形 $EFGH$ 可得, $EF \parallel BC$, $EH \parallel AD \parallel FG$,

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ABC,$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AK}{AD}.$$

$$\therefore \frac{EF}{AK} = \frac{BC}{AD} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

$$\textcircled{2} \because EH \parallel AD,$$

$$\therefore \triangle BHE \sim \triangle BDA$$

$$\therefore \frac{EH}{AD} = \frac{BE}{BA}, \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB},$$

$$\therefore \frac{EH}{AD} + \frac{EF}{BC} = \frac{BE}{AB} + \frac{AE}{AB} = 1.$$

$$\because EH = x, AD = 8, BC = 12,$$

$$\therefore EF = 12 - \frac{3}{2}x,$$

$$\therefore S = EH \cdot EF = -\frac{3}{2}x^2 + 12x = -\frac{3}{2}(x-4)^2 + 24.$$

$$\therefore S_{\max} = 24.$$

(2) 设正方形的边长为 a ,

① 当正方形 $PQMN$ 的两个顶点在 BC 边上时:

$$\frac{8-a}{a} = \frac{8}{12},$$

$$\text{解得 } a = \frac{24}{5}.$$

②当正方形 $PQMN$ 的两个顶点在 AB 或 AC 边上时，

$$\because AB = AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore BD = CD = 12 \div 2 = 6,$$

$$\therefore AB = AC = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 10,$$

$$\therefore AB \text{ 或 } AC \text{ 边上的高} = AD \cdot BC \div AB = 8 \times 12 \div 10 = \frac{48}{5},$$

$$\therefore \frac{\frac{48}{5} - a}{a} = \frac{\frac{48}{5}}{10},$$

$$\text{解得 } a = \frac{240}{49}.$$

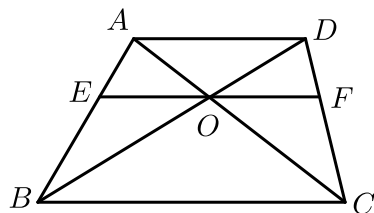
综上，正方形 $PQMN$ 的边长是 $\frac{24}{5}$ 或 $\frac{240}{49}$ 。

【标注】【知识点】三角形内接四边形问题

二、8字模型

练习

17. 梯形 $ABCD$ 中， AD 与 BC 平行， AC 与 BD 交于 O ，过 O 与 BC 平行的直线分别交 AB 、 CD 于 E 、 F ，则 OE 与 OF 的大小关系是（ ）。



- A. $OE < OF$ B. $OE = OF$ C. $OE > OF$ D. 不确定

【答案】B

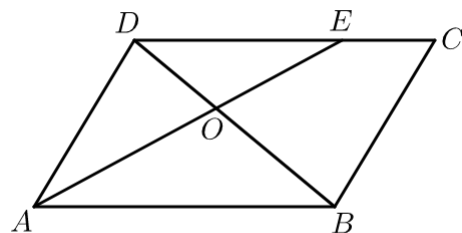
【解析】相似模型

$$\begin{aligned} \triangle AOD \text{ 与 } \triangle COB \text{ 相似, 则 } \frac{AD}{BC} &= \frac{AO}{OC} = \frac{DO}{OB} \\ \text{而 } \triangle AOE \text{ 与 } \triangle ACB \text{ 相似, } \frac{AO}{AC} &= \frac{EO}{BC}, \text{ 同理 } \frac{DO}{DB} = \frac{FO}{BC} \\ \text{则 } \frac{EO}{BC} &= \frac{FO}{BC}, \text{ 即 } EO = FO. \end{aligned}$$

【标注】【拓展思维】基本梯形蝴蝶模型

【知识点】三角形的组成

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 DC 上的一点， AE 交 BD 于 O ， $\triangle AOB \sim \triangle EOD$ ，若 $DE = \frac{2}{3}AB$ ， $AB = 9$ ， $AO = 6$ ，求 DE 和 AE 的长．



【答案】 $DE = 6$ ， $AE = 10$ ．

【解析】 $\because \triangle AOB \sim \triangle EOD$ ，

$$\therefore AB : DE = OA : OE,$$

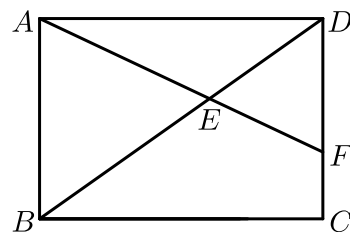
$$\because DE = \frac{2}{3}AB, AB = 9, AO = 6,$$

$$\therefore DE = \frac{2}{3} \times 9 = 6, OE = \frac{2}{3}OA = 4,$$

$$\therefore AE = OA + OE = 6 + 4 = 10.$$

【标注】【知识点】相似8字型

19. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = \sqrt{6}$ ，点 E 在对角线 BD 上，且 $BE = 1.8$ ，连接 AE 并延长交 DC 于点 F ．



(1) 求 CF 的长．

(2) 求 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BEA}}$ 的值．

【答案】 (1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ．

(2) $\frac{4}{9}$ ．

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

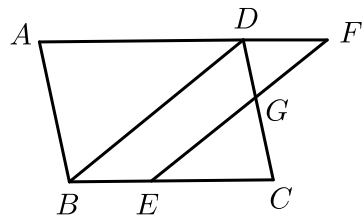
$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}
& \text{又 } AB = \sqrt{3}, \\
& BC = AD = \sqrt{6}, \\
& \therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 3, \\
& \because BE = 1.8, \\
& \therefore DE = 3 - 1.8 = 1.2, \\
& \because AB \parallel CD, \\
& \therefore \angle BAF = \angle AFP, \\
& \angle FDB = \angle ABD, \\
& \therefore \triangle DEF \sim \triangle BEA, \\
& \therefore \frac{DF}{AB} = \frac{DE}{BE}, \\
& \text{即 } \frac{DF}{\sqrt{3}} = \frac{1.2}{1.8}, \\
& \text{解得 } DF = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\
& \therefore CF = CD - DF, \\
& = \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\
& = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) & \because \triangle DEF \sim \triangle BEA, \\
& \therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BEA}} = \left(\frac{DF}{AB} \right)^2, \\
& = \left(\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{4}{9}, \\
& \text{即 } \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle BEA}} = \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

20. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 AD 的延长线上，且 $DF = BE$ ， EF 与 CD 交于点 G 。



- (1) 求证： $BD \parallel EF$.
 (2) 若 $\frac{DG}{GC} = \frac{2}{3}$ ， $BE = 4$ ，求 EC 的长。

【答案】(1) 证明见解析.

(2) $EC = 6$.

【解析】(1) $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore DF \parallel BE$, 又 $\because DF = BE$,

$\therefore$ 四边形 $DBEF$ 为平行四边形,

$\therefore BD \parallel EF$.

(2) $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore DF \parallel EC$,

$\therefore \triangle DFG \sim \triangle CEG$,

$$\therefore \frac{DG}{GC} = \frac{DF}{EC} = \frac{2}{3},$$

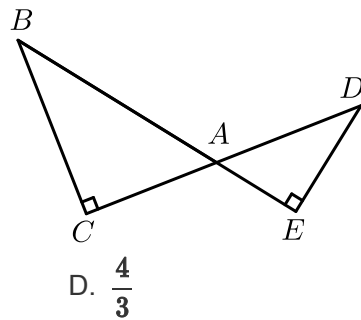
又 $\because DF = BE = 4$,

$\therefore EC = 6$.

【标注】【知识点】相似8字型

练习

21. 如图, $\angle C = \angle E = 90^\circ$, $AC = 3$, $BC = 4$, $AE = 2$, 则 $AD = ()$.



A. $\frac{5}{4}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{10}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

【答案】C

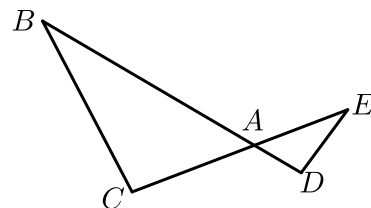
【解析】由题意得: $\triangle ABC \sim \triangle AED$, $AB \cdot AE = AC \cdot AD$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore AD = \frac{10}{3}.$$

【标注】【知识点】相似反8字型

22. 已知: 如图, $AB \cdot AD = AC \cdot AE$, 求证: $\triangle ABC \sim \triangle AED$.



【答案】证明见解析 .

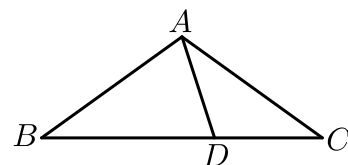
【解析】 $\because AB \cdot AD = AC \cdot AE$,
 $\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$,
 又 $\because \angle BAC = \angle EAD$,
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$.

【标注】【知识点】相似反8字型

三、 子母模型与射影定理

练习

23. 如图 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $AB = AC = a$, 点 D 是边 BC 上的一点 , 且 $BD = a$, $AD = DC = 1$, 则 a 等于 () .



A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. 1

D. 2

【答案】 A

【解析】 由题可知 ,

$$\because AB = AC = a ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C .$$

$$\text{又} \because DC = DA = 1 ,$$

$$\therefore \angle C = \angle DAC ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC ,$$

$$\therefore \frac{AB}{DA} = \frac{BC}{AC} ,$$

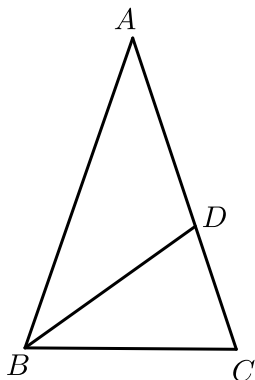
$$\therefore \frac{a}{1} = \frac{a+1}{a},$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore \text{选A}.$$

【标注】【知识点】相似反A字型

24. 如图, 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 36^\circ$, $BC = 1$, 点 D 在边 AC 上且 BD 平分 $\angle ABC$, 则 $CD =$ _____.

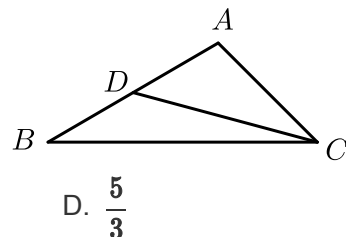


【答案】 $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

【解析】略

【标注】【知识点】相似反A字型

25. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5$, $AC = 3$, 点 D 在边 AB 上, 且 $\angle ACD = \angle B$, 则线段 AD 的长为_____.



A. $\frac{25}{3}$

B. $\frac{9}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

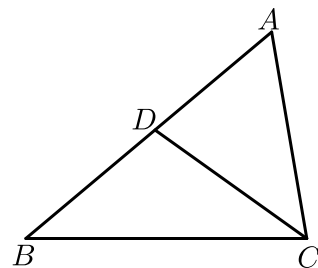
D. $\frac{5}{3}$

【答案】 B

【解析】 $\frac{9}{5}$

【标注】【知识点】相似反A字型

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AB 上， $\angle ACD = \angle B$ ，若 $AD = 2$ ， $BD = 3$ ，则 AC 等于（ ）。



A. 5

B. 6

C. $\sqrt{6}$

D. $\sqrt{10}$

【答案】 D

【解析】 由题意可知： $\angle ACD = \angle B$ ，且 $\angle A = \angle A$ ，

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

$$\text{又} \because AB = AD + BD = 5,$$

$$\therefore \frac{2}{AC} = \frac{AC}{5},$$

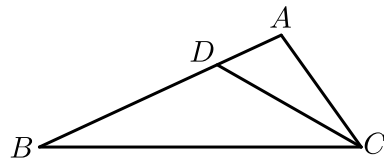
$$AC^2 = 10,$$

$$AC = \sqrt{10}.$$

故选D.

【标注】【知识点】相似反A字型

27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 AB 边上的一点，若 $\angle ACD = \angle B$ ， $AD = 1$ ， $AC = 2$ ， $\triangle ADC$ 的面积为1，则 $\triangle BCD$ 的面积为（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 C

【解析】 $\because \angle ACD = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABC,$$

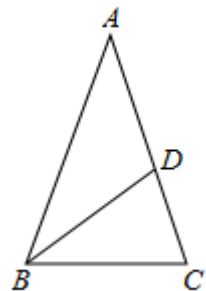
$$\therefore \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4, S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACD} = 3.$$

【标注】【知识点】相似三角形的判定-两角对应相等

28. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 36^\circ$ ， $AB = AC$ ， BD 是 $\angle B$ 的平分线。



(1) 求证： $AD^2 = CD \cdot AC$ 。

(2) 若 $AC = m$ ，求 AD 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}m.$$

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 72^\circ.$$

$\because BD$ 平分 $\angle B$ ，

$$\therefore \angle CBD = \angle A = 36^\circ.$$

$$\therefore \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{BC},$$

$$\therefore BD \cdot BC = AB \cdot CD.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AD = BD = BC,$$

$$\therefore AD^2 = AC \cdot CD.$$

(2) 若 $AC = m$ ，

$$AD^2 = CD \cdot AC$$

$$= (AC - AD) \cdot AC$$

$$= AC^2 - AD \cdot AC$$

$$= m^2 - m \cdot AD.$$

$$\therefore AD^2 + m \cdot AD - m^2 = 0,$$

$$AD = \frac{-m + \sqrt{5m^2}}{2} = \frac{-m + m\sqrt{5}}{2},$$

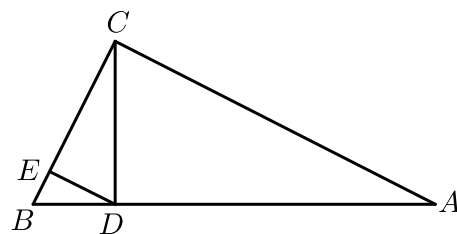
$$\therefore AD > 0,$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}m.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

练习

29. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D , $DE \perp BC$ 于 E , 若 $BE = 2$, $CD = 4\sqrt{5}$, 则
 $AD = \underline{\hspace{2cm}}$, $BD = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $8\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$

【解析】 由射影定理, 得

$$CD^2 = CE \cdot BC,$$

$$\therefore CD^2 = CE \cdot (CE + 2),$$

$$(4\sqrt{5})^2 = CE^2 + 2CE,$$

$$\text{解得 } CE = 8,$$

$$\therefore BC^2 = BE + CE = 10,$$

由射影定理, 得

$$BD^2 = BE \cdot BC = 2 \times 10 = 20,$$

$$\therefore BD = 2\sqrt{5},$$

由射影定理, 得:

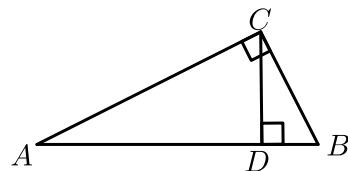
$$CD^2 = BD \cdot AD,$$

$$\therefore \text{即 } 80 = 2\sqrt{5} \cdot AD,$$

$$\therefore AD = 8\sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】射影定理 (双垂直)

30. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D . 若 AD 、 BD 是方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两个根 ($AD > BD$). 求:



(1) CD 的长 .

(2) $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}}$ 的值 .

【答案】 (1) CD 的长为4 .

(2) $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$.

【解析】 (1) 解方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$,

得 : $x_1 = 2$, $x_2 = 8$

$\therefore AD = 8$, $BD = 2$.

$\therefore CD \perp AB$ 于 D ,

$\therefore \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$.

$\therefore \angle A + \angle ACD = \angle ACD + \angle DCB$,

$\therefore \angle A = \angle DCB$.

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 与 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中 , $\begin{cases} \angle ADC = \angle CDB = 90^\circ \\ \angle A = \angle DCB \end{cases}$

$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \sim \text{Rt}\triangle CDB$,

$\therefore \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$, 即 : $CD^2 = AD \cdot BD = 8 \times 2 = 16$

$\therefore CD = 4$

(2) 与(1)同法可证 $\text{Rt}\triangle ACB \sim \text{Rt}\triangle CDB$

则 $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{BD^2}{CD^2 + BD^2} = \frac{2^2}{4^2 + 2^2} = \frac{1}{5}$

即 : $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{5}$.

【标注】【知识点】射影定理 (双垂直)

31. 解答下列各题

(1) **【问题情境】**如图1 , $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$, 我们可以利用 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 相似证明 $AC^2 = AD \cdot AB$, 这个结论我们称之为射影定理 , 试证明这个定理 .

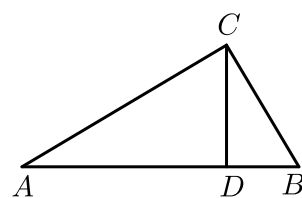


图 1

(2) 【结论运用】如图2，正方形 $ABCD$ 的边长为30，点 O 为对角线 AC 、 BD 的交点，点 E 在 CD 上，过点 C 作 $CF \perp BE$ ，垂足为 F ，连接 OF 。

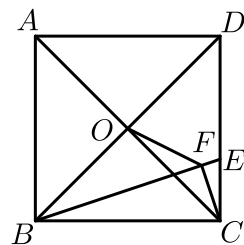


图 2

- ① 试利用射影定理证明 $\triangle BOF \sim \triangle BED$ 。
- ② 若 $DE = 2CE$ ，求 OF 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) ① 证明见解析。

② $OF = 6\sqrt{5}$ 。

【解析】(1) 如图1，

$\because CD \perp AB$ ，
 $\therefore \angle ADC = 90^\circ$ ，
 而 $\angle CAD = \angle BAC$ ，
 $\therefore \text{Rt}\triangle ACD \sim \text{Rt}\triangle ABC$ ，
 $\therefore AC : AB = AD : AC$ ，
 $\therefore AC^2 = AD \cdot AB$ 。

(2) ① 如图2，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
 $\therefore OC \perp BO$ ，
 $\angle BCD = 90^\circ$ ，
 $\therefore BC^2 = BO \cdot BD$ ，
 $\because CF \perp BE$ ，
 $\therefore BC^2 = BF \cdot BE$ ，

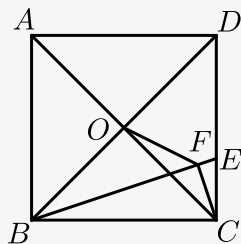


图 2

$$\therefore BO \cdot BD = BF \cdot BE,$$

$$\text{即 } \frac{BO}{BE} = \frac{BF}{BD},$$

$$\text{而 } \angle OBF = \angle EBD,$$

$$\therefore \triangle BOF \sim \triangle BED.$$

$$\textcircled{2} \because BC = CD = 30,$$

$$\text{而 } DE = CE,$$

$$\therefore DE = 20, CE = 10,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCE \text{ 中, } BE = \sqrt{10^2 + 30^2} = 10\sqrt{10},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OBC \text{ 中, } OB = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = 15\sqrt{2},$$

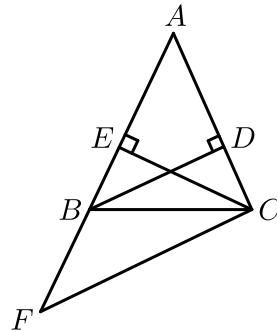
$$\therefore \triangle BOF \sim \triangle BED,$$

$$\therefore \frac{OF}{DE} = \frac{BO}{BE}, \text{ 即 } \frac{OF}{20} = \frac{15\sqrt{2}}{10\sqrt{10}},$$

$$\therefore OF = 6\sqrt{5}.$$

【标注】【知识点】射影定理（双垂直）

32. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BD \perp AC$ 于 D ， $EC \perp AB$ 于 E ， $CF \parallel BD$ 与 AB 的延长线交于 F 。
求证： $AB^2 = AE \cdot AF$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】 $\because FC \parallel BD, \therefore \angle F = \angle ABD,$

$$\because BD \perp AC, \therefore \angle ADB = 90^\circ, \therefore \angle ACF = 90^\circ$$

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle AFC,$$

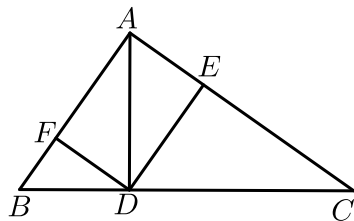
$$\therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC} \text{ 即 } AC^2 = AE \cdot AF.$$

$$\text{又 } AB = AC,$$

$$\therefore AB^2 = AE \cdot AF.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

33. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, AD 是斜边 BC 上的高, $DE \perp AC$ 于 E , $DF \perp AB$ 于 F , 求证: $\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BF}{CE}$.



【答案】证明见解析.

【解析】方法一: $\because \triangle ABC \sim \triangle FBD \sim \triangle FDA \sim \triangle EDC$,

$$\begin{aligned}\therefore \frac{AB}{AC} &= \frac{FB}{FD} = \frac{FD}{FA} = \frac{ED}{EC}, \\ \therefore \frac{AB^3}{AC^3} &= \frac{FB}{FD} \cdot \frac{FD}{FA} \cdot \frac{ED}{EC} = \frac{BF \cdot DE}{CE \cdot AF},\end{aligned}$$

又 $\because AF = DE$,

$$\therefore \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BF}{CE}.$$

方法二: 由射影定理得 $\frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BD^2 \cdot BC^2}{DC^2 \cdot BC^2} = \frac{BF \cdot AB}{EC \cdot AC}$,

$$\text{故 } \frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BF}{CE}.$$

方法三: 由 $\triangle ABD \sim \triangle CAD$, 可知 $\frac{AB}{AC} = \frac{DF}{DE}$, 又 $\because$

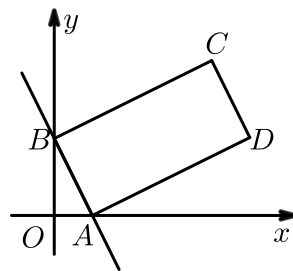
$$\begin{aligned}\frac{AB^4}{AC^4} &= \frac{FB \cdot FD}{EC \cdot ED}, \\ \therefore \frac{AB^3}{AC^3} &= \frac{AB^4}{AC^4} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{FB \cdot FD}{EC \cdot ED} \cdot \frac{DE}{DF} = \frac{BF}{CE}.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

四、一线三等角模型

练习

34. 已知, 直线 $y = -2x + 2$ 与坐标轴交于 A 、 B 两点, 以 AB 为短边在第一象限做一个矩形 $ABCD$, 使得矩形的两边之比为 $1:2$. 求 C 、 D 两点的坐标 ().



A. $C(3, 3)$, $D(5, 2)$

B. $C(3, 3)$, $D(4, 2)$

C. $C(4, 4)$, $D(5, 2)$

D. $C(3, 3)$, $D(4, 1)$

【答案】 C

【解析】 如图，过C作 $CE \perp y$ 轴于E， $DF \perp x$ 轴于F，

$\because$ 直线 $y = -2x + 2$ 与坐标轴交于A、B两点，

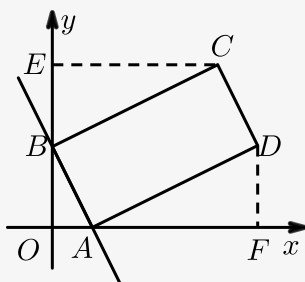
$\therefore A(1, 0)$, $B(0, 2)$,

$\therefore OA = 1$, $OB = 2$,

由三垂直模型得到：

$\triangle AOB \sim \triangle BEC$,

$\therefore$



$$\frac{OA}{EB} = \frac{OB}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2},$$

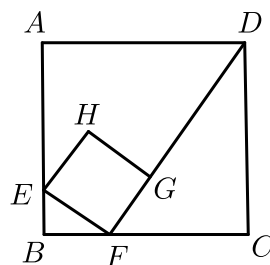
$\therefore C(4, 4)$,

同理 $D(5, 2)$.

【标注】 【知识点】相似模型的构造和应用

35. 如图，在面积为24的正方形ABCD中，有一个小正方形EFGH，其中E、F、G分别在AB、BC、

FD上. 若 $BF = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，则小正方形的周长为（ ）.



A. $\frac{5\sqrt{6}}{8}$

B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

【答案】C

【解析】∵四边形 $ABCD$ 是正方形，面积为24，

$$\therefore BC = CD = 2\sqrt{6}, \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

∵四边形 $EFGH$ 是正方形，

$$\therefore \angle EFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFB + \angle DFC = 90^\circ, \angle BEF + \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle DFC,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{BF}{DC},$$

$$\therefore BF = \frac{\sqrt{6}}{2}, CF = \frac{3\sqrt{6}}{2}, DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2},$$

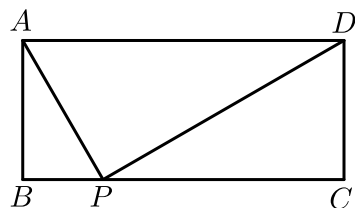
$$\therefore \frac{EF}{\frac{5\sqrt{6}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{6}},$$

$$\therefore EF = \frac{5\sqrt{6}}{8},$$

$$\therefore \text{正方形} EFGH \text{的周长为} \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

36. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AD = a$ ， $AB = b$ ，要使 BC 边上至少存在一点 P ，使 $\triangle ABP$ 、 $\triangle APD$ 、 $\triangle CDP$ 两两相似，则 a 、 b 间的关系式一定满足（ ）。



A. $a \geq \frac{1}{2}b$
C. $a \geq \frac{3}{2}b$

B. $a \geq b$
D. $a \geq 2b$

【答案】D

【解析】若设 $PC = x$ ，则 $BP = a - x$ ，

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle PCD,$$

$$\therefore \frac{AB}{PC} = \frac{BP}{CD}, \text{即} \frac{b}{x} = \frac{a-x}{b},$$

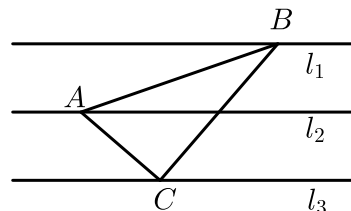
$$\text{即} x^2 - ax + b^2 = 0 \text{方程有解的条件是: } a^2 - 4b^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a+2b)(a-2b) \geq 0, \text{ 则 } a-2b \geq 0,$$

$$\therefore a \geq 2b.$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

37. 如图, 将 30° 的直角三角板的三个顶点分别放置在三条等距离的平行线 l_1, l_2, l_3 上, 若 $AC = 1$, 则 l_1, l_2 之间的距离为 ().



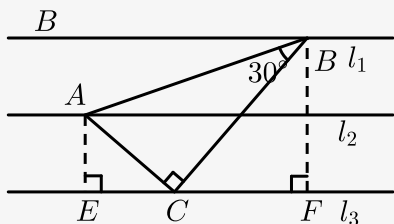
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

B. $\frac{3}{5}$
D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】过A、B作 $AE \perp l_3$ 于E, 作 $BF \perp l_3$ 于F,

易得



$$\triangle AEC \sim \triangle CFB,$$

$$\frac{AC}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{设 } AE = a, \text{ 则 } BF = 2a,$$

$$\therefore \frac{EC}{BF} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore EC = \frac{\sqrt{3}}{3} BF = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 2a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AEC \text{ 中, } AE^2 + EC^2 = AC^2,$$

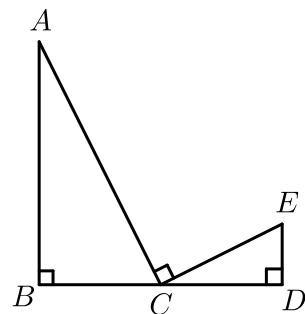
$$\text{即 } a^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = 1^2,$$

$$\therefore a > 0 \therefore a = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

故选C.

【标注】【知识点】一线三等角相似

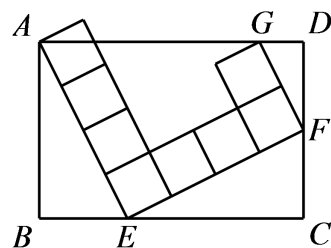
38. 如图, $AB \perp BD$, $ED \perp BD$, C 是线段 BD 的中点, 且 $AC \perp CE$, $ED = 2$, $AB = 6$, 那么 $BD =$ _____.



【答案】 $4\sqrt{3}$

【标注】 【知识点】 一线三等角相似

39. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 由 8 个面积均为 1 的小正方形组成的模板如图所示放置, 则矩形 $ABCD$ 的周长为 _____.



【答案】 $8\sqrt{5}$

【解析】 由图知: $\triangle ABE \sim \triangle ECF \sim \triangle FDG$,

$$\therefore \frac{AB}{FD} = \frac{AE}{FG} = 2,$$

$$\therefore AB = 2DF,$$

$$\therefore AB = 2CF,$$

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{AE}{EF} = \frac{BE}{CF} = 1,$$

$$\therefore AB = CE, BE = CF,$$

$$\therefore CE = 2CF,$$

$$\text{又} \because EF = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ECF \text{ 中: } EC^2 + CF^2 = EF^2,$$

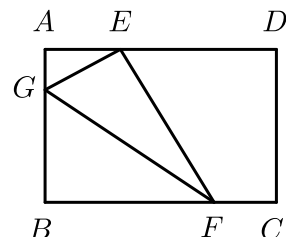
$$\therefore CE = \frac{8}{5}\sqrt{5}, CF = \frac{4}{5}\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = \frac{12}{5}\sqrt{5}, AB = \frac{8}{5}\sqrt{5},$$

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的周长为 $8\sqrt{5}$.

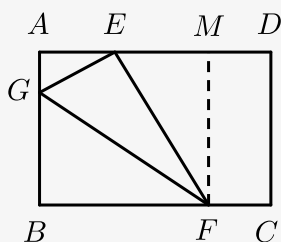
【标注】【知识点】一线三等角相似

40. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $AD = 9$, 点 E 为线段 AD 上一点, 且 $DE = 2AE$, 点 G 是线段 AB 上的动点, $EF \perp EG$ 交 BC 所在直线于点 F , 连接 GF . 则 GF 的最小值是 _____.



【答案】 $3\sqrt{5}$

【解析】 过点 F 作 $FM \perp AD$ 交边 AD 于点 M , 如图所示:



$$\because EF \perp EG,$$

$$\therefore \angle GEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG + \angle FEM = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG + \angle AGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEM = \angle AGE,$$

$$\because \angle A = \angle FME = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle AGE \sim \triangle MEF,$$

$$\therefore \frac{GE}{EF} = \frac{AE}{MF},$$

$$\because DE = 2AE, AD = 9,$$

$$\therefore AE = 3, DE = 6,$$

$$\because MF = AB = 6,$$

$$\therefore \frac{GE}{EF} = \frac{AE}{MF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EF = 2GE,$$

设 $AG = x$,

则在 $\text{Rt}\triangle AGE$ 中,

$$GE = \sqrt{AG^2 + AE^2}$$

$$= \sqrt{9 + x^2},$$

在 $\text{Rt}\triangle GEF$ 中,

$$EF = \sqrt{GE^2 + GF^2}$$

$$= \sqrt{GE^2 + (2GE)^2}$$

$$= \sqrt{5}GE$$

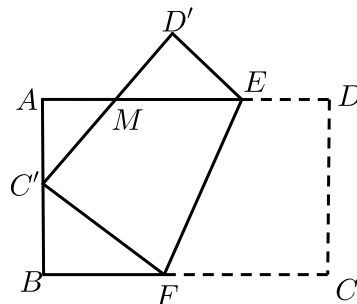
$$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + x^2},$$

当 $x = 0$ 时, GF 长度最小,

GF 最小为 $3\sqrt{5}$.

【标注】【知识点】一线三等角相似

41. 如图, 将矩形 $ABCD$ 沿 EF 折叠, 使顶点 C 恰好落在 AB 边的中点 C' 上, 点 D 落在 D' 处, $C'D'$ 交 AE 于点 M . 若 $AB = 6$, $BC = 9$, 则 AM 的长为 _____.



【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】 根据折叠的性质可知, $FC = FC'$, $\angle C = \angle FC'M = 90^\circ$,

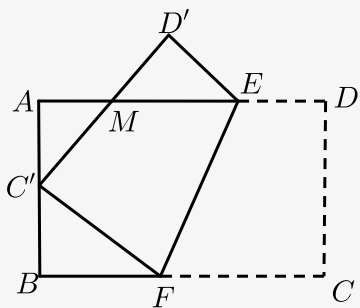
设 $BF = x$, 则 $FC = FC' = 9 - x$,

$$\therefore BF^2 + BC'^2 = FC'^2,$$

$$\therefore x^2 + 3^2 = (9 - x)^2, \text{ 解得: } x = 4,$$

$$\therefore \angle FC'M = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'M + \angle BC'F = 90^\circ,$$



$$\text{又} \because \angle BFC' + \angle BC'F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AC'M = \angle BFC',$$

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AMC' \sim \triangle BFC',$$

$$\therefore \frac{AC'}{BF} = \frac{AM}{BC'},$$

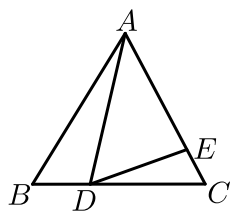
$$\therefore BC' = AC' = 3,$$

$$\therefore AM = \frac{9}{4}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

练习

42. 如图，在边长为9的正三角形 ABC 中， $BD = 3$ ， $\angle ADE = 60^\circ$ ，则 AE 的长为_____.



【答案】 7

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, AB = BC,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 9 - 3 = 6,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ADB = 120^\circ.$$

$$\therefore \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle EDC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle EDC,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

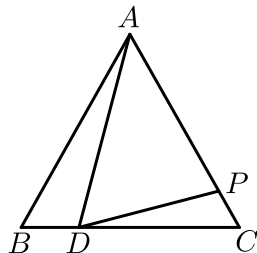
$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE, \text{ 则 } \frac{AB}{BD} = \frac{DC}{CE}, \text{ 即 } \frac{9}{3} = \frac{6}{CE},$$

解得 $CE = 2$,

故 $AE = AC - CE = 9 - 2 = 7$.

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

43. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 边上的一点, P 为 AC 边上的一点, $\angle ADP = 60^\circ$, $BD = 1$, $CP = \frac{2}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的边长为 _____.



【答案】3

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADP = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDP + \angle CPD = 120^\circ, \angle CDP + \angle ADB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CPD,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCP,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CP},$$

$$\because BD = 1, CP = \frac{2}{3},$$

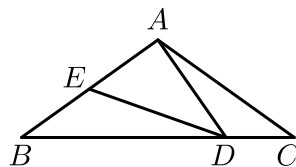
$$\therefore \frac{AB}{AB-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}},$$

$$\text{解得, } AB = 3.$$

故答案为: 3.

【标注】【知识点】一线三等角相似

44. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = 8$, D 、 E 分别为 BC 、 AB 边上一点, $\angle ADE = \angle C$.



(1) 求证: $\triangle BDE \sim \triangle CAD$.

(2) 若 $CD = 2$, 求 BE 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $BE = 2.4$.

【解析】 (1) $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

$$\because \angle ADE + \angle BDE = \angle ADB = \angle C + \angle CAD,$$

$$\angle ADE = \angle C,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle CAD.$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CAD.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } \triangle BDE \sim \triangle CAD, \therefore \frac{BD}{CA} = \frac{BE}{CD}.$$

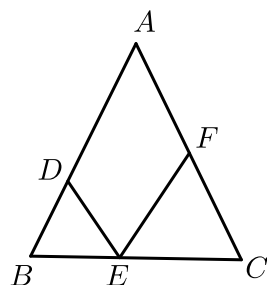
$$\because AB = AC = 5, BC = 8, CD = 2,$$

$$\therefore DB = BC - CD = 6.$$

$$\therefore BE = \frac{DB \times CD}{AC} = \frac{6 \times 2}{5} = 2.4.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

45. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 6$, $BC = 5$, D 是 AB 上一点, $BD = 2$, E 是 BC 上一动点, 连接 DE , 并作 $\angle DEF = \angle B$, 角的一边 EF 交线段 AC 于 F .



(1) 求证: $\triangle DBE \sim \triangle ECF$.

(2) 当 F 是线段 AC 中点时, 求线段 BE 的长.

(3) 连接 DF , 如果 $\triangle DFE \sim \triangle DEB$, 求 FC 的长.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $BE = 2$ 或 3 .

(3) $FC = \frac{25}{8}$.

【解析】 (1) $\because \angle B + \angle DEB + \angle BDE = 180^\circ$

$$\angle DEB + \angle DEF + \angle FEC = 180^\circ$$

$$\text{又} \because \angle DEF = \angle B$$

$$\therefore \angle BDE = \angle FEC$$

$$\because AB = AC$$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CEF.$$

(2) 设 $BE = x$, 则 $CE = 5 - x$,

由(1)得, $\triangle BDE \sim \triangle CEF$,

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{BE}{CF},$$

$$\text{即} \frac{2}{5-x} = \frac{x}{3},$$

$$\text{得} x = 2 \text{ 或 } 3,$$

经检验, $x = 2$ 或 $x = 3$ 是原分式方程的解,

$$\therefore BE = 2 \text{ 或 } 3.$$

(3) 若 $\triangle DFE \sim \triangle DEB$

前面已经证得 $\triangle DEB \sim \triangle EFC$

$$\therefore \triangle DFE \sim \triangle DEB \sim \triangle EFC$$

$$\therefore \angle BDE = \angle FEC = \angle EDF$$

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{BD}{BE}, \frac{DE}{EF} = \frac{BD}{CE}$$

$$\therefore BE = CE$$

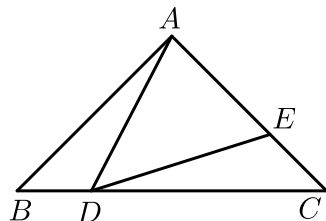
$$\therefore E \text{ 是 } BC \text{ 中点}, BE = CE = \frac{5}{2}$$

$$\because BD : EC = BE : CF, \text{ 即 } 2 : \frac{5}{2} = \frac{5}{2} : FC$$

$$\therefore FC = \frac{25}{8}.$$

【标注】【知识点】相似三角形中的动点问题

46. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 1$, 点 D 是 BC 边上的一个动点 (不与 B 、 C 点重合), $\angle ADE = 45^\circ$.



(1) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle DCE$.

(2) 设 $BD = x$, $CE = y$, 求 y 与 x 的函数关系式.

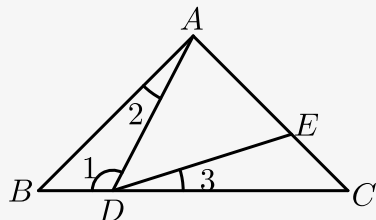
(3) 当 $y = \frac{1}{2}$ 时, 求 x 的值.

【答案】(1) 证明见解析.

$$(2) y = -x^2 + \sqrt{2}x.$$

$$(3) x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【解析】(1)



$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle ADE,$$

$$\because \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ - \angle ADE = 135^\circ,$$

$$\angle 2 + \angle 1 = 180^\circ - \angle B = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 2,$$

$$\because \angle C = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE.$$

$$(2) \because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 1,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2},$$

$$\because \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{DC},$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{2} - x},$$

$$\therefore y = -x^2 + \sqrt{2}x.$$

$$(3) \text{ 将 } y = \frac{1}{2} \text{ 代入 } y = -x^2 + \sqrt{2}x,$$

$$\frac{1}{2} = -x^2 + \sqrt{2}x,$$

$$x^2 - \sqrt{2}x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

